■座談会

ゆらぎで世界を解析する(1)

ゆらぎを扱う数学の誕生

飛田武幸(名城大学特任教授、名古屋大学名誉教授)
高安秀樹((株)ソニーコンピュータサイエンス研究所シニアリサーチャー)
公文俊平(GLOCOM所長)

■ゆらぐ世界と複雑系の数学

公文　飛田先生がライフワークとして取り組んでこられた複雑系、ホワイトノイズ解析というテーマが、いま数学の新しい一分野として確立されつつあるとうかがいました。その基本的な考え方はどのようなものであって、どんな応用分野をもっているのか。また、これまでの数学に対して、どのような違った角度からの貢献ができるのかということに興味があります。それから、高安先生が経済物理学でやっておられるお仕事が、どうも飛田先生のやっておられることとかかわりがありそうだと……。

高安　非常にありますね。

公文　で、どのようにかかわりがあるのか、今日はいろいろと議論していただきたい。それから私のほうからしますと、私がこのところ興味をもっている複雑系の考え方、つまり「コンピュテーショナル」なアプローチといわれているものは、エドワード・フレドキンとか、スティーブン・ウルフラムのような人々が唱えているものです。それは、非常に単純なインプットから、きわめて単純な変換過程を通しているのに、出てくるアウトプットの中には無限の複雑性をもっているものがある。そういう意味での「複雑系」、つまり、ごく簡単なセルオートマトンが、とんでもない複雑性を生み出すという話です。ところが、飛田先生の場合には、「インプットが無限の多様性をもっていて、それをあるプロセスで変換すると、むしろ相対的に単純な秩序が出てくる」と言えるような感じがしています。

飛田　ある意味、そうですね。

公文　そうだとすれば、ちょうど方向が反対のようにも見えるのですが、そのあたりをどう理解したらいいのかが私の大きな関心事です。とはいえ、私も含めて本誌の読者のほとんどは数学者ではありませんので、そのあたりをご配慮いただきながらお話しいただけると助かります。

飛田　いま公文先生がおっしゃったことは、私がお話ししようとしていることと深い関係があります。公文先生は単純なものがあって、簡単な変換でも複雑なものが出てくるというお話をされましたが、私どものほうから言いますと、むしろ複雑でランダムなものがあって、ランダムといっても瞬間的な対応ではなくて、時間とともに変化していく。この時間が入っているということは、非常に大きな要素です。しかも連続的に時間が入ってくるというのは、連続性というものが裏にあって大きな制約になっていますから、出てくるアウトプットのあり方についても相当大きな制約があるわけです。いずれにしても観測されるものが複雑で、しかもランダムで、時間とともに移り変わっている、発展形である。そういうものがあった場合に、結果から見てわれわれは何が言えるのか。それが、一番先の問題設定としてあります。

一般的な話というのはなかなかできないのですが、これまでの認識として、「ゆらぎやノイズは邪魔だからなるべく除去しよう。あるいは平均をとって、ゆらいでいる余分な部分をとってしまおう」というネガティブな見方が大きかった。最近はそうではなくて、むしろゆらぎを逆に利用してやろうという方向になってきています。

飛田武幸(ひだ・たけゆき)
1952年名古屋大学理学部数学科卒。61年理学博士。愛知学芸大学、京都大学、名古屋大学を経て名城大学に勤務、現在名城大学特任教授。一貫して確率過程論・関数解析学を専攻し、75年にホワイトノイズ解析を提唱した(アメリカ数学会によるこの分野の分類番号は 60H40.)。64-65年インディアナ大学研究員、67-68年プリンストン大学客員教授。85年に名古屋で第15回確率過程論国際学会を主催したほか、国際交流に努めてきた。国際研究報告誌IDAQPの編集長を務めている。著書『ブラウン運動』は英・露・中国語に翻訳された。その他、確率論や数理物理などに関する著書・論文多数。

高安秀樹(たかやす・ひでき)
名古屋大学大学院理学研究科修了(理学博士)。神戸大学理学部助手・助教授、東北大学大学院情報科学研究科教授を経て、1997年よりソニーコンピュータサイエンス研究所シニアリサーチャー。専門は、統計物理学、フラクタル理論、経済物理学。著書『フラクタル』(朝倉書店)、『エコノフィジックス』(日経)他。

先ほどの話と組み合わせますと、われわれとしては、ランダムで複雑なものが与えられた場合、それを解析して——ランダムであるだけにいろいろな可能性を含んでいるわけですから——もとの構造をなんとか推測する方法はないだろうか。そのために、アドホック的にケースバイケースでいろいろ考えられてきています。インプットがわかっているか否かは別にして、偶然現象としてのアウトプットがあって、途中にある変換過程は一般的にはノンリニアなもの、そういうものをどうやって解析したらいいのだろうか。アイデンティフィケーションと言いますか、どのように決めたら数学の問題として設定できるだろうか。そういうことを考えてきまして、なんとかケースバイケースではなく、多少は一般的なことが言えるのではないかという状況になってきています。

そうかといって、何でもできてしまうというわけではありません。私はよくお医者さんの診断にたとえるのですが、医者は、患者から現在どういう状況にあるかというアウトプットだけを知るわけです。そこから、どういう病気が原因で、どういう薬がいいのかという、原因や途中の経過、つまり、インプットと途中のノンリニアのデバイスをどうやって知るかということが医者の大事な仕事だと、われわれの目からは見ることができる。一般的に何かを扱おうとする場合、インプットがわからなくて、途中のノンリニアなシステムもわからないということが非常に多い。ところがこれまでの数学の方法を見ますと、多くの場合インプットを仮定しているわけです。こういうインプットがあって、途中にノンリニアなことがあると、結果としてこうなるというようなことが多い。実際問題に適用する場合に一番大事なことは、インプットをどうやってアウトプットから推測するかということですが、何も資料がないとそれはできない。医者にはインプットを想像するための経験がたくさんあります。それを数学的に定式化しないと数学にならないわけです。

いろいろな立場からランダムな現象を記述する方程式が書かれているのですが、だいたいインプットを仮定していることが多いですから、それでは具体的な問題に役立たせるにはどうすればよいか。数学的なモデルを作って当てはまりを見るのも一つの方法でしょう。そのように漠然と長い間、考えてきて、自分自身は確率論、とくに時間とともに変化していく確率過程論を勉強していますと、いろいろな課題を、応用問題としてよりもむしろ数学的な問題としてどう設定したらいいのかということを、絶えず疑問に思ってきました。ですから、ある瞬間にできたというものではなくて、長い間考えてきて、だんだんと形が整いそうな段階になってきていると思います。

■ ランダムの基本はブラウン運動

飛田　以上は大雑把な客観条件で、これからは論理的

飛田武幸氏

な面で言わせていただきます。われわれが使うのは、原因はともかく、結果としてランダムで複雑なシステムで、しかも時間というパラメータが入っています。時間が連続的に動いていくということは、先ほど申しましたように何らかの意味での連続性がそこにあるわけで、すごく大きな制約になります。連続性がないと全く独立に勝手に動きうるわけですが、自然現象は時間的につながっている。連続性が要求されると、ランダムなあり方が影響を受けるわけです。

一番基本的なものとして、連続的ではあるけれど毎回、新しい情報が入ってきているというものを取り上げます。それが驚くことに「ブラウン運動」が典型なのです。ブラウン運動が一番大事な基本的なものになっていることがだんだんわかってきました。

ブラウン運動というと、中学生でも知っている、水の中に浮かんでいる微粒子の不規則な運動です。ロバート・ブラウンが1827年に初めて発見しました。単なる現象として見ればありきたりなことですが、科学として見た場合に、なぜそういう運動が起こるのか、どういう理由でそれが起こるのか、どういう現象なのかということを調べていくうちに、それが基本的なランダム現象であるということがわかってきました。基本的という意味は、細かく時間を分けても毎回、独立した情報が付け加わっている。アインシュタインが1905年にそれを数学的に設定して、実際の現象とも合っているということが示されました。その時点で、ランダムな現象であって最も基本的なものだということはわかったのです。

それを順番に説明したいと思いますが、いろいろな角度から説明しなければなりません。もう一度、先ほどの問題に戻りますと、複雑な現象があって、われわれはアウトプットだけを知っている。どうやってインプットや途中のメカニズムを知るのかということになります。

公文　すみません。いまのブラウン運動の現象をアウトプットだと、とりあえずは理解するわけですか。

飛田　いや、むしろインプットとしてブラウン運動が考えられるということで、実際問題と結びつけるのはもう少し先になります。

そういう現象を見るときに、どうやったらいいだろうかということです。単純に要素還元主義（reductionism）の立場で考えますと、ランダムな現象があって時間とともに動いていくときに、一番単純な基本的なゆらいでいる現象は何だろうかと。与えられたものは非常に複雑で、複雑さのあり方はケースバイケースでみんな違うわけですが、それを何か一番基本的なゆらいでいる現象——基本的という意味は、現象として見ても、数学的なアプローチをしようとするときに見ても一番エレメンタリー（素子的）なもの——に分けることができ、そうしていまの現象はそうやって分けたものの関数になっている。還元主義からいって大事なことは、基本的なことがあって、実際の現象はゆらぎの関数で、普通の関数 ——２乗、３乗、指数関数とか——になっている。ゆらいでいるのは変数だけです。そうなっていれば、関数のほうはお家芸でたくさんのやり方がありますから、ゆらぎの最も基本的なもの、エレメンタリーなものがあって、その関数になっている。こういう立場で考えようと思ったわけです。

■ ランダムな現象の統合と解析

飛田　いま二つのことを言いました。最初は大雑把な話で、次にブラウン運動が基本的なものだという予告をしたわけです。もう一つ全く別の話として、一般的なランダムな複雑系があって、発展系がある。それをエレメンタリーなものの関数にしたい。関数はランダムでない関数です。エレメンタリーな基本的なものだけがランダムで、ランダムなものの２乗とか３乗とかいう、よくわかっている関数で書くことができれば、後は基本的なランダムなものがわかることで、ランダムな複雑系は解析できるだろう。これが発想です。その基本的なものとしてブラウン運動がある。これが一つの結論です。ブラウン運動だけかと言うとちょっと難しいところで、1930年ごろまでは他にも、単純あるいは複合ポアソンノイズとか基本的なものがいくつかありました。現時点では、特にブラウン運動が本当に基本的なものだということがだんだんとわかってきています。他のものを考えてもいいけれど、とにかくブラウン運動が基本です（それを正確に示すには超汎関数を使います）。

普通のランダムな複雑系は、それをどういうような関数系、しかも時間発展を入れた関数で表すのかということが問題になるわけです。これはsynthesis（統合）です。最初にreductionism（還元主義）があって、次にsynthesisがあって、最後の段階にanalysis（解析）がある。解析は数学のお家芸で、変数だけはランダムですが、微分、積分を使えば解析できる。これが結論です。

一番単純な例を言いますと、インプットにブラウン運動があって、途中のメカニズムはリニアで、アウトプットがある。これが定常であれば、アウトプットのスペクトルを見てやればすべてわかる。単純な例だとそういうことがありますが、一般にはそうはいかなくて、途中に非線形な関数がある。解析をするにしても、ベキを考えたり、指数関数を考えたり、フーリエ変換をしたりと、いろいろな演算を駆使して、アウトプットを解析して途中のメカニズムを決めることに問題が設定されるわけで


高安秀樹氏

す。それが大きな枠組みです。与えられたランダムな複雑系を解析するときに、ケースバイケースにやるのではなくて、一般論を作りたい。いろいろな複雑系がありますが、基本的なものは一つであって欲しいわけです。ランダムの一番基本的なものを一つ決め、それの関数にして、その関数の解析をする。このステップをやれば、かなり一般の解析ができることになります。

公文　なるほど。少し感じがつかめてきました。ブラウン運動のようなものが一番基本的なインプットであるとして、それに何らかの関数、とくにノンリニアな関数による変換を行うことによって、いろいろな複雑系がアウトプットとして出てくるに違いない。そういうところを解析して数学にしようというわけですか。

飛田　そういうストラクチャです。それをどこまで数学でできるかということです。

■ 熱の原因は原子・分子のゆらぎ

公文　それについて、高安先生に何かコメントをいただきたいのですが。

高安　私は物理学者ですから、物理の視点から補足す

るようなコメントを言わせていただきます。まず、物理現象にどうやってランダムさが生まれてくるのかというと、大きく分けて三つあります。

一つはカオスに出てくるような非線形なダイナミクスで、初期値を与えられれば未来は決定論的なのだけれど、どんどん誤差が増幅される形になってランダムに見える。もう一つは、情報が欠如しているために起こる。つまり、実際の現象は無数の要素から作られているのですが、われわれに見える部分は一部でしかない。するとその外から入ってくるもの、出て行くものについてはわからないわけで、これはランダムに扱うのが一番妥当な扱いになります。もう一つは、物質の根底にあるダイナミクスは量子力学だと信じられているわけですが、その量子力学は確率的にしか現象を記述できない。そういう意味で、あらゆる物の動きが量子力学で記述されるのであれば、そこに潜在的に確率が入っているという見方もできます。

いずれにしても、マクロに観測したときに完璧に決定論的に動く現象というは、実際にはまずありません。物理学の発展からいうと、まずニュートンがニュートン力学——これは全くノイズのない世界です——を作り、惑星の運動を記述する段階で非常にうまくいったので、あたかも物理現象はすべて決定論的な方程式が支配しているという印象が広まってしまった。現実のマクロな現象に関して言えば、たとえば紙切れをパッと落としても毎回違う落ち方をするわけで、どう落ちるかわからない。多かれ少なかれ確率が入ってきます。ホワイトノイズとかランダムウォークの考え方が有効なのは、確率が、さっき言いました三つの原因のどれから出て来たとしても、途中の段階、アウトプットに至るところではほとんど同じようなことになっている。だから、インプットのオリジンが非線形のダイナミクスであろうが、量子力学であろうが、情報の欠如であろうが、結果的にはほぼ同じ扱いで処理できてしまう。そういう意味で数学的に抽象化されたきれいな体系になってくると思います。

それから、こういうゆらぎの大切さですが、経済現象などに関してはゆらぎが勝負と言いますか、あらゆる量がゆらいでいます。ニュートン力学が全盛だったころに、いわゆる需要と供給の考え方——ノイズの全くない世界の定式化です——が出てきて、そのまま経済学が発展してしまった。金融工学以外の経済学には、こういうランダムな考え方がほとんど入っていない。歴史的に見ても、物理学の中にゆらぎの概念が入ってきたのは、19世紀の半ばから、本格的にはアインシュタインがブラウン運動の謎を解いた20世紀の初頭からです。それから、やっとゆらぎの本体がわかった。物理で見れば、物質のゆらぎの本体は、原子・分子の熱によるゆらぎであるということが20世紀の初頭にわかったのですが、それより前には、熱の正体はわかっていませんでした。「熱素」という架空のものがあって、それが暖かさの原因だと考えられていた時期もかなり長くありました。

20世紀に入って、物質が原子・分子でできていて、しかもそれがランダムにゆらいでいる。そのゆらぎこそが熱だとわかって、やっと現象の本質がわかったわけです。経済学はそれ以前の段階で、ゆらぎのない世界の定式化で作られてきていて、いまもその流れが続いているのですが、それは物理現象で言えば、熱がない世界、絶対零度の世界、あるいは摩擦——摩擦は原子・分子のゆらぎからくる——のない世界です。そういう絶対零度の物理現象を記述するような枠組みで、経済現象の定式化が進んでいます。

現在、経済学と実際の経済を見てみると、金融の現場とか実際に物を売り買いしている人から見ると、経済学があまり役に立っていない。その一番の原因は、ノイズを無視していることにあります。ノイズは必ず入ってくるわけです。ノイズが少しでも入ると、全然違う性質が出てしまうような現象であれば、それはあまり現実的ではない。高校の物理などで、「もし摩擦がなかったら、どういう動きをする」という議論をするわけですが、物理嫌いの人にとっては「でも実際には摩擦があるのに、なぜ都合よく仮定してしまうのだろう」と気に入らない。でもそれは正しくて、現実には摩擦もあるし、外からの擾乱もある。そういう擾乱があっても見え続けるような

現象が本当に起こる現象であって、ほんの少しでも擾乱が入ると消えてしまうような性質は机上の空論に過ぎないか、あるいは極限的な実験をやってはじめて見える現象です。

そういう意味で、物理現象に関してはおよそ100年前から少しずつノイズに対する考え方が染みついてきたのですが、経済に関して言えば、金融工学は別ですが、それ以外はノイズをほとんど無視した絶対零度の世界を考えている場合がほとんどで、それが現実との乖離に出ている。


公文俊平GLOCOM所長

■ 確実なものとゆらぎの相互作用

公文　そこで早速、疑問が出てきたのですが、いま高安先生はランダムの発生には三つあると言われましたが、いずれにせよそれはゆらぎそのものであって、極端に量子論的に言うならば、「あらゆる物はゆらいでいる」。しかしブラウン運動を素人として考えると、時間の連続性の中に確実なる花粉があって、それに対してゆらぎが作用しているから、複雑な動きが起こっている。花粉にあたる何かある実体、確実性があるような気がします。先ほど高安先生が最後に言われた経済現象でも、ゆらぎばかりを話しているのではなくて、そのゆらいでいる何か、つまり、ある物の値段というものが基本にある。それなしにゆらぎしかないと言うと何もなくなってしまうのではないかという単純な疑問なのですが。

飛田　たぶん経済現象のほうが、具体的に今のことに答えられるのではないかと思います。

公文　経済現象でなくても、全部そこは同じなのではないでしょうか。

飛田　分子生物学ではそういう話がたくさんあります。何か行動するものがあって、それにゆらぎが付け加わっているというケースが非常に多い。決定論的な部分とそれをゆらがせている部分がある。それが足し算ぐらいであれば簡単ですが、ノンリニアにかかわりあってくると非常に複雑になります。先ほどの高安先生のお話は非常に現実的な問題としてとらえているので、大変おもしろい。そういうところで出てくるゆらぎは量子力学的なものであったり、カオス的なものであったりするのですが、何か決定論的なものとゆらぎとが……。決定論的な話だけであれば微分方程式などで解けばいいわけです。ゆらぎが入って、単純な足し算なら引けばいいのかもしれませんが、そう簡単にはいかない。掛け算もあったりして、影響しあって出てくるわけですから。それをどう解析するかということになると、ゆらいでいるランダムなものに対する解析と決定論的なものに対する解析との組合せでなければならない。それが、たぶん公文先生がおっしゃったような、ゆらぎだけではなくて他の何かと相互作用をしながら来ているということだと思います。

公文　その性質は、飛田先生がおっしゃる一番基本的なものの中には生きているわけですか。

飛田　そうです。

高安　ブラウン運動の起源は花粉の微粒子のゆらぎで、ミクロに見れば花粉にまわりの水の分子がぶつかってゆ

らいでいるわけだから、まわりの原子・分子がどう飛んでくるかということがわかれば決定論的になるかもしれないという見方は、もちろん物理にもあります。しかし、それを突き詰めていくと、その分子の動きを記述するためには量子力学が必要になるとか、いろいろな要素が入ってきて、数学的に完全に決定論的な式で書くことは原理的に不可能です。どこかでノイズが出てくるブラックボックスを仮定せざるを得ない。もちろん、分子がぶつかった後、花粉がどう動くかということは、動力学的に追いかけられます。マーケットの価格変動でも、暴落するようなときには動力学的に動いたり、バブルのときには指数関数的に上昇したり、非常に動力学的な側面が見える場合もあります。先ほど飛田先生がおっしゃったように、まさに決定論的な動力学の部分とゆらぎの部分の競合で、ときにはゆらぎが勝って見えるし、ときにはダイナミクスが勝って見えるけれど、大事なのは常に両方が混在しているということです。

先ほどの繰り返しになりますが、ノイズ部分が完全に０か、それとも有限かにはすごく大きな違いがあります。たとえば鉛筆の尖ったところを下にして立てようとすると、現実には不可能ですが、温度が完全に０だったら、重心がきっちり真上に来るようにすればゆらがないわけで、数学的には安定な解がある。原子１個でもぶつかれば不安定になって倒れてしまうので、現実に考えなければならないのは倒れている状態です。そういうノイズが完全に０のときに出てくる特異的な解はあるにはありますが、そちらに目が行ってしまっているケースがかなりあります。経済学で典型なのは、「みんなが合理的に判断したら、市場価格は安定するはずだ」という議論ですが、いつの時代のマーケットを見ても価格が安定していたことは一度もない。論理的には一応可能ですが、ノイズをちょっと入れるだけで、そういう解はなくなってしまいます。

■ 自然現象のゆらぎと同期

公文　飛田先生の理論は、一番根源にあるノイズと決定論的なもののかかわりのあり方についてのものだということはわかりましたが、そこをもう少し詳しくお話しいただけませんでしょうか。

飛田　具体的な例をあげましょう。亡くなられた小田稔先生――Ｘ線天文学の創始者ですが――と、そのＸ線天文学が始まったころの研究会で、早川幸男先生やロッシ教授といった方々に私が加わってディスカッションしました。そのときに小田先生が提案されたのは、まさにいまのゆらぎの問題でした。人工衛星が上がるようになって、Ｘ線が大気で吸収されないように大気圏外から観測できる。ブラックホールの周りにある天体からＸ線が出ているのを観測してデータをとる。まさにお医者さんでいうと、患者から症状を聞いているわけです。いろいろなグラフが得られて、昔なら、定常なタイムシリーズだとみなされれば、スペクトルを決めて、1/fノイズとかあるいは他のタイプに当てはめるなどでおしまいになりかねないが、小田先生はさすがに天体物理学者で、「いろいろ見ているともっと詳しい性質が見られる。たとえばサンプルの中に自己相似(self similar)のような構造が入っている。これはゆらぎの現象である。これがどういうゆらぎか解析できないだろうか。スペクトル以外のもっと詳しい統計的な量はないだろうか」というのが問題設定でした。でもそれだけではお医者さんと同じで、「熱があります」と言われただけでは何もわからない。その前に何かあったとか患者から聞けば若干、推察ができる。小田先生は、ここが天体物理学者の直観で、鹿威(ししおど)しだとおっしゃる。「鹿威しがいっぱいあって、そこに水が溜まるとカタンと落ちる、そういうショックが積み重なってワァッと出てくる」とおっしゃる。そうすると非常におもしろい数学的なモデルがあります。１次元に射影したブラウン運動を考えますと、ある程度、ローカルにマキシマムに到達する点があります。次にさがって、

またマキシマムがある。この待っている時間です。マキシマムからマキシマムに移るのを待っている時間、これがちょうど鹿威しの現象に似ています。それが非常にたくさん集まっているとおっしゃる。ブラウン運動が非常にジグザグとしているので、待ち合わせのあり方がいっぱいあるわけです。数学的に言いますと、そういうのが、公文先生が以前おっしゃっていた指数型のベキ法則ですか。結果からいうと安定なプロセスになるわけです。そういうものが、観測されたX線のデータと合うのはないか。そういうことを検討したらいいだろうとなったのです。ところが、それをチェックするには無限次元確率解析が必要で、理論はまだ十分熟成していないのですが。いま申しましたように、われわれは結果をだいたい知っている。けれどそれを解析するには、何か別のファクターを入れて、純粋なゆらぎと何か別の作用を入れて、ミックスしたものがどうなっているかということで可能な限り妥当なモデルを考えていくというのが、いま許された一つの方法ではないかと思います。

次は、それがどういう数学に乗るのかということ、そのためにはどんな数学を作らなくてはならないのかということが、われわれにとっては大事な問題になります。ただ、ゆらぎの入った現象をいろいろな立場から考えるということでは、もっと議論が必要なのではないかと思います。私自身は数学のほうに狭く走りすぎるので、いろいろとここで話ができればと思います。

公文　数学の話に入る前に、いまの鹿威しの話を聞いて思ったことがあります。スティーヴン・ストロガッツの書いた "Sync" という本を読んだのですが、彼は「万物はあるリズムをもったオシレータだ」と書いています。鹿威しも、ある意味ではそうです。水位が少しずつ上がっていって、あるところまできたらトンと落ちる。そしてしばらく動かなくなっている間に、また水位が上がって落ちる。そういうものが無数にあって、ノンリニアな相互作用をしていると考えて、そこからあるモデルを作ると、しばらく時間が経つと、その無数の鹿威しが全部同じリズムでいっせいに動くようになる。人間の脳でいうと、ニューロンのリズムが一つにまとまってきてドンと大きな知覚になるとか、不規則に点滅していたホタルの光がしばらくすると全部同期して、いっせいに同じリズムで点滅するようになるとかですね。

飛田　安定状態に移る。

高安　引き込みですね。

公文　ストロガッツは、そういうモデルをいろいろ考えて議論をしているのですが、そういう話とも何かつながりがあるのでしょうか。

高安　振動するものの集合でいろいろな現象を説明しようというのは、物理のほうでもいろいろあって、典型的なのは地震現象です。地震というのは、素過程としては、岩石と岩石に歪みがかかっていて、ある程度より力が溜まると瞬間的にズッとずれる。stick slipといいます。消しゴムでもぐっと動かすとガッガッガッとギザギザの動きをすることがありますが、あれもstick slipです。stick slipの性質をもつようなものにゆっくり歪みを加えていくと、部分、部分にあるところで限界を越えてすっとすべり、またこっちですべる。その影響がまた周りに伝わる。実験室で岩石に歪みをかけても、地球上に小さな地震がピッ、ピッと起こってくる。そのとき超音波が出て、エネルギーがどのくらい出たかが観測できるのですが、そういう観測で出てくるミクロの地震と、実際のマクロなスケールの地震というのは、実はほとんど同じ統計的な法則性に従う。逆にstick slip性に根拠があるといえることになります。

いまおっしゃったいずれは全部そろってくるというのは、たぶんちょっと視点が違っていて、現象によって全部そろって終わってしまうのもあるけれど、地震現象はそうはならない。大きなものから小さなものまでさまざまに分布し続ける状態が、実際に起きているわけです。

公文　しかし、そういういろいろなケースがあるとしても、飛田先生のおっしゃったようなゆらぎと作用の関係を一般的に解析するような方法があれば、その中の一つの特殊な解として、それぞれが説明できるかもしれない。

高安　ある値まで行くと急に出力が出るというのは、非線形性の最も強い極限的な状態です。線形だったら、インプットに比例してアウトプットが出てこなくてはいけないのだけれど、あるところまで出力が全然なくて、あるところまでくると突然、出力があるというのは、まさに非線形効果です。

経済の話に無理やりつなげると、売りたい人と買いたい人がいて取引が成立するか、しないかというのにも同じような閾値があって、売りたい人と買いたい人の値段の差がだんだん近づいていって、同じになった瞬間に取引が成立する。ところが、売りたい値段と買いたい値段が折り合わない間は、取引は何も起こらない。そういう具合に、あるところまで行くと急にアウトプットが出るような現象が非線形作用の極限ですが、それが実際にはいろいろなところにあるわけです。脳の神経細胞の発火なども典型的な例です。

■ ランダムなものを変数とする関数

公文　そこまでうかがったところで、先生の次のパートの話をお願いしたいのですが。

飛田　少し方向転換になるのですが、数学ですので、なるべく一般的な話をしたいと思います。もともとアウトプットがわかっていて、インプットを見つけるというのが理想的な発想ですが、リニアであればいろいろな手段があってぱっとわかる。ところが、ノンリニアの場合にはそうはいかない。難しい数学がいるわけです。ゆらぎのそのものの２乗とか３乗というノンリニアな関数はどうなるのかというのが問題になります。これを一般的にやろうとすれば、もちろん答えはすぐには出ないのですが、先ほどの還元主義に戻って、たとえば、一番基礎なるものはブラウン運動で、微分すればホワイトノイズであるということがわかっていれば、つまり基礎になるゆらぎの数学的な構造がわかっていれば、それの非線形な関数を考える一般論はすぐにできる。一般には決定論的なものを含めて、そういうものの関数になっているわけです。関数というときの変数が何かと問われると、われわれとしてはブラウン運動を変数にしたい。各時間のブラウン運動の値が変数、あるいは微分してホワイトノイズを作っておく。各時点で独立な確率変数の系ですが、そういったランダムな量を変数にするような関数は扱いやすいのです。一般には変数は、時間であったり位置であったりするのですが、他にランダムなものが主要な変数として登場してきて、それの非線形な関数がある。これをどう扱うかということです。基本として、われわれとしては微分・積分で関数を決めたいわけですから、ランダムなもので微分するとか、ランダムなものを変数と見て積分をするということを考えなくてはいけない。これまでの数学は、これをアドホックにいろいろなところで使ってはいるのですが、システマティックにはなっていなかった。

どういうことを考えたいかというと、決定論的な場合は置いておいてランダムな場合の扱いだけを考えますと、ゆらぎが、あるところでちょっとだけ変わったら、現象はどう変わるかという、これは微分の結果です。ふつうの関数を決定する場合に、微分が元の関数の定数倍になれば指数関数だとか、そういうように微分方程式によって関数を決めることができます。微分方程式は解くためだけにあるのではなくて、実はその解になる関数を特徴づけるものとして大きな役割を果たしています。したがってランダムな現象を決めるときに、ゆらぎがちょっと変わったときにどういう動きをするかという変化の様子を見るような式があれば、それによってランダムな現象が規定できるわけです。そうすると、いままでの位置とか時間を変数にしたような古典力学的な関数の扱いと、

今度はゆらぎが入っていますから、そこにランダムなものを変数にもった関数の微積分とが同時に行われなければいけない。ランダムなものを変数としたときの微積分を作らなければいけない。これは、いままでの数学ではもちろんカバーできないことです。たとえば独立した、ランダムなガウス分布に従うものが二つありますと、足すと２倍になるのではなく、$\sqrt{2}$倍になる。そういう普通の実数の関数の解析とは違った解析が必要になってくるわけです。ちょうど実数の関数があって、複素数を変数にする関数があってと、ヒエラルキーが上がっていくように、今度はランダムの関数へともう一つ上げたい。

■ $1 + 1 = \sqrt{2}$ という確率の数学

公文　そこを、もうちょっと詳しく教えていただけませんか。私どもが普通、変数と関数という言葉で理解しているのは、変数とは、ある変域、たとえば実数という範囲の中である値を取る。$y = 2x$ という関数があるとすれば、変数xの値を２倍したものが関数の値として出てくる。これが関数関係だと教わりました。それに対して、変数が複素数の場合もある。変数が単なる一個の数ではなくて、２次元の数になっている場合ですね。これはわかります。しかし、「変数がランダムである」というのは、どういうことでしょう。

飛田　ある瞬間にゆらぎがあって、それが出てくるときは２乗で影響するとします。ガウス分布に従うようなランダムな量があって、それがある瞬間にポンと入ってきた。アウトプットに出るときは２乗で効いてくるとしたら、これの２乗を考えなければならない。普通の数の２乗でしたら簡単ですが、ランダムなものの２乗ですから普通のようにはいきません。では、積分はどうするかと言いますと、x^2の積分は $x^3/3$と決まりますが、ゆらぎがあって、それをゆらぎで積分するとどうなるのか。いわゆる確率積分の理論が必要です。

そういういままでにない数学を作らなければならない。もちろん実数や複素数は使えますから、従来の解析がベースにあって、その上にもう一つ屋を重ねなければいけない。それがホワイトノイズ解析です。

公文　たとえば $y = x^2$ という関数があったときに、x が３なら y は９です。そのx がランダムな量だというと、x がたまたま３になっても、y は９になるとは言えない、ということですか。

飛田　x としてある偶然量が決まったら、その２乗も決まるけれど、x はいつもゆらいでいますから、そのゆらぎに応じてこちらも２乗でゆらいできますということです。今度は、ある時間のゆらぎ、その次のゆらぎと、たくさんのものの関数になっている。ある瞬間のゆらぎをちょっと変えたらどうなるのか。こういう微分方程式を作らないと、その関数は特徴づけられない。

高安　わかりやすい例で言いますと、商店で一つの商品を売るとします。売れ行きは毎日、多少変動している。それじゃあ、商品の数を２倍にしたら収益も２倍になるかというとそうではない。こっちの商品が売れても、別の商品は売れないかもしれないし、両方の売れ行きが下がるかもしれない。変動しているわけです。では、商品の数をn個にしたら元の数のときの何倍の利益が上がるのか。それを数学的に簡単なモデル化をして、売れ方の変動がブラウン運動あるいはホワイトノイズであると仮定してやると、商品の数がnになると、儲けはnではなく $\sqrt{n}$ にしかならないという結果が、たとえば出るわけです。

公文　それが、ランダムな変数で積分をしたということですか。

高安　商品の数に比例するのではなくて平方根になる。それがなぜ平方根になるのかという部分を証明するのが確率変数の数学です。

公文　少しわかってきました。

飛田　独立した、同じ分布に従っている二つのものを足すと$\sqrt{2}$倍になるということを式で証明しろといえば証明できますが、なかなか納得できない。国際高等研究所の小冊子に、なぜ $1+1=\sqrt{2}$ なのかということが書いてあります。いま高安先生にわかりやすい例で話していただきましたが、ランダムだということは、$1+1=2$ という数学だけではなくなるわけです。といって、$1+1=2$ を否定するわけではなくて、ランダムでない普通の量の解析が下にあって、もう一つ上に階を作らなければならないということです。

高安　補足させてください。確率的な現象の場合には、１＋１の結果 が２になる場合もあるし、１になる場合も、３になる場合もある。さまざまな値をとって分布するわけですが、平均すると$\sqrt{2}$になるというわけです。

■いかに基本的なランダムを抽出するか

飛田　その次には、ブラウン運動的なものを元の偶然現象から選び出すにはどういう方法があるのかを考えなければならない。私は一番有効な方法は変分法だと思っているのですが、対象とする関数によっていろいろです。ランダムな現象自体もマルコフとか定常とかいろいろあるわけですが、一般的に言って、変分法という無限次元の微積分を使って独立なランダムな量を、与えられたランダムな複雑系から構成すること。それはエレメンタリーなものであります。要素還元主義に従い独立な確率変数のシステムを選び出して、その関数で元の複雑系を表現するのです。その基礎になる独立な変数を選ぶにはどうしたらいいかというと、私はいま申しましたように変分法の利用が一番だと思っています。そういう解析は、これからどんどん進めていかなければなりません。

公文　変分とは、無限次元の微積分だということですか。

飛田　そうです。

高安　別の見方で言うと、ある量が最大あるいは最小になるような条件を求めてくるということになりますね。エントロピー最大の法則とかありますが。

飛田　インディアナ大学時代に公文先生と一緒に読んだポントリャーギンの最適化過程論に出てくる、ああいう発想です。あれをゆらぎでやりますので、少し複雑になります。

高安　何の制約もないと、モデルの変数はいくらでも増えていくわけですが、最大いくら、最小いくらという制約をつけてやると、可能なモデルの範囲は狭められてくる。それが現実にうまくいく場合がある。

公文　それで、変分法が有効だとして……

飛田　与えられたシステムからエレメンタリーなものを選び出すことが、重要な――現時点ではそれほどエスタブリッシュされてはいないのですが――かなり一般的な方向を示しています。最初に戻りますが、還元主義で基本になる独立な量を選んで、次はどういう関数を選ぶかということで、普通のルーチンな数学に乗るわけです。問題はどうやって関数を選ぶかということと、そういうものを変数にしたときの微積分です。普通の微積分と違って、前に申しましたようにゆらぎで微分する具体的方法です。それがなかなかうまくいかない。実験をしている方もいるのですが、人工的にホワイトノイズをブラックボックスにインプットして、アウトプットを観測しようという場合もあります。このとき微分係数にあたるものは観測できる。ただ理論と実際が違うのは、生物学者のお話では「イナーシャ（inertia）があるから、そう理想的にはいかない」。そういう誤差まできちっと

押さえるような数学を、いずれは作っていかなければならないだろうと思います。原理的には微分して関数を決めて、という普通の数学のオーソドックスな方法で考えられることだと思います。

実際の話として、「アウトプットだけわかっていてインプットは？」というときに、手探りでもとへ戻るだけでなくて、こちらでいろいろ試してモデルを作ってみて、という考え方もあります。生物学の中研一先生が、アメリカナマズの網膜の働きを見たいと考えられた。アメリカナマズの網膜は比較的単純で、網膜は耳とともに外からインプットとして与えて反応を観測できる人間の器官の典型だそうです。人間の代わりにナマズの網膜を使って、インプットをホワイトノイズで入れる。なぜホワイトノイズかというと、パワーが一定の中では一番たくさん情報をもっているので、あらゆる変況に応じてくれるからです。それをインプットしてアウトプットを測る。こういうインプットがあると、こういう働きがあるということが、そこからモデル化されるわけです。実際、ノンリニアの２乗、３乗のところが割合大事で、色を識別するのはどこだったとか、いろいろなことがわかるようです。何もなしでアウトプットだけみるというのは非生産的ですが、いろいろなモデルを作ってみて較べるとか、小田先生のように自己相似があるとか、鹿威しがあるはずだとおっしゃる。そういうファクターを入れて候補になるシステムを定めていく。そういうことが必要だと思います。

（次号に続く）

（2004年１月29日GLOCOMにて収録）