■座談会

ゆらぎで世界を解析する(2)

現代社会におけるゆらぎの数理の重要性

飛田武幸(名城大学特任教授、名古屋大学名誉教授)
高安秀樹((株)ソニーコンピュータサイエンス研究所シニアリサーチャー)
公文俊平(GLOCOM所長)

■ 直観では理解できない確率の微積分

公文　また素人的質問に戻りますが、ゆらぎがない場合にはブラックボックスがあって、そこにどんな関数が入っているがわからない。インプットを入れてみて、アウトプットを観測する。1というインプットを入れてみると2というアウトプットが出て来た。1.1とちょっと増やすと、2.2になった。そうすると微分係数は2だということがわかって、それを積み重ねていくと全体の関数の形がわかるという話ですね。ところが、そこにゆらぎがあるものだから、インプットを変えたといっても、その変えた量自体がランダムになる?

飛田　そうです。

公文　そして出て来たアウトプットも何かランダムな振る舞いをみせている。しかし、それがある種の関数関係に従っているというわけですか。その場合の変換関係は単に「関数」というのですか。それともそういうランダム性をもっている変換には、何か別の名前が付いているのですか。

飛田　変換と呼んでも関数といってもよいのですが、結果が解析しやすいような関数形にしておくのが便利です。たとえば積分は確率積分です。そこでは物理の言葉で言いますと生成作用素なるものが出てきまして、物理現象に対するオペレーションと似ているところがあります。

公文　インプットを1と入れたつもりでも、ゆらぎが入っているために、1ばかりではなくてある分布になっている。それで、ホワイトノイズを入れるのが一番効率がいいということなんでしょうか。出てくるアウトプットも一定の値ではなくて、ある分布をもった値で、つまり微分係数そのものが分布している。そういう微分係数をもった関数も、普通の「関数」という言葉で呼んでいいのですか。

飛田　ホワイトノイズ汎関数、white noise functionalと呼んでいます。超汎関数もあります。

高安　少し補足しますと、確率的な変数の微分というのは、非常に考えにくいものです。というのは、たとえば横軸が時間で縦軸が花粉の位置という一番簡単なランダムウォークの場合でも、微分という概念は非常に難しくて、数学的に連続時間でのブラウン運動を考えたら、いくら拡大して見てもランダムにゆらゆらゆれているわけです。ところが微分の基本的な考え方は、大きく見ればゴチャゴチャしていても、どんどん拡大していけば直線になっていて、その直線の傾きが微分係数になると考えるわけです。

公文　一定になるはずだというわけですね。

高安　それが直観的な理解ですが、確率変数を微分するということは、いくら拡大しても直線にならないものを微分するということで、直観的な理解がしにくい。それに加えて、横軸の変数のほうも確率的になっていて行ったり来たり動いているとなると、もう直観では理解できない、数学ならではの世界です。そういう抽象的なものが、自然現象や物理現象の背後にあるというのは、おもしろいと思います。

飛田　物理現象の中には、非常に有効な例があります。もう一つ種あかしをすると、実際、ゆらいでいるのは目に見えにくいのですが、無限次元のラプラス変換——S変換と私たちは呼んでいるのですが——に相当するものを適用しますと、ランダムでない関数になります。しかし、変数が関数でそれが無限次元の空間を動きます。無限次元の微積分を使って解析し、それをまた元へ戻します。イメージとしては、いま高安先生がおっしゃったようなことで、まさにそれをやりたい。コンピュータにやらせるには、ラプラス変換を施さなければならない。

飛田武幸(ひだ・たけゆき)

1952年名古屋大学理学部数学科卒。61年理学博士。愛知学芸大学、京都大学、名古屋大学を経て名城大学に勤務、現在名城大学特任教授。一貫して確率過程論・関数解析学を専攻し、75年にホワイトノイズ解析を提唱した(アメリカ数学会によるこの分野の分類番号は 60H40.)。64-65年インディアナ大学研究員、67-68年プリンストン大学客員教授。85年に名古屋で第15回確率過程論国際学会を主催したほか、国際交流に努めてきた。国際研究報告誌IDAQPの編集長を務めている。著書『ブラウン運動』は英・露・中国語に翻訳された。その他、確率論や数理物理などに関する著書・論文多数。

高安秀樹(たかやす・ひでき)

名古屋大学大学院理学研究科修了(理学博士)。神戸大学理学部助手・助教授、東北大学大学院情報科学研究科教授を経て、1997年よりソニーコンピュータサイエンス研究所シニアリサーチャー。専門は、統計物理学、フラクタル理論、経済物理学。著書『フラクタル』(朝倉書店)、『エコノフィジックス』(日経)他。

公文　ええっ。そうするとゆらぎが消える、のですか。

飛田　消えるのではなくて、変換されるわけです。ゆらぎの関数が、関数の関数に変換される。なぜラプラス変換が有効かというと、ディラックのデルタ関数をご存知ですか。たとえばマイナスのほうでは0、プラスのほうでは1という不連続な関数がありまして、これを微分します。両側は0で、0のところは微分できないのですが、無理やり微分しますと、無限大になります。すると微分と積分の関係で、0以外では全部0、0のところで無限大になるような超関数になります。それを積分すると、普通の関数に戻り、$x=0$ で0から1へ跳ぶ階段関数になります。こういうデルタ関数を普通の関数のように扱うにはどうしたらいいかというと、ラプラス変換を使います。デルタ関数のラプラス変換は1になる。このデルタ関数をもう一度、微分すると、今度は x に変換されます。そういう非常に特殊な超関数もラプラス変換を通して、しばしば普通の関数に変わることがあります。サンプルは非常に不規則に動いていても、その関数(私たちがよく使う関数)は無限次元のラプラス変換により、まともな関数になる。結果は無限次元空間を動く関数を変数にするような汎関数です。それでもかなり見やすくなって、いろいろな解析ができます。いったんそこにもってきておいて、計算したうえで、また元に戻すということをやります。イメージは、いま高安先生が説明してくださったような立場でやらないと役に立たないでしょう。

公文　そういう分野をいま展開しておられるということですね。それを物理学者からごらんになると、どんな印象を受けられますか。

高安　私は確率変数で微分するあたりまでは勉強不足で、深くは言えないのですが、しかし現象として、変数が確率変数になることはもちろんあるわけで、ゆらぎも考えなければならない。物理現象、経済現象も含めて、何でも現象を記述するときの変数は全部、確率変数と思っておくほうが最も一般的なわけで、必要なことです。しかし数学のほうでも、飛田先生がまだ研究されている段階で、確立していないので、使うほうの立場からすると、そのレベルまでは行ってない。変数は普通の実数で考えたり、全部のデータを離散的にしておいて、離散量で計算してやる。そうすると、抽象的な数学なしで一応、計算はできます。そういう場合、たいていはゴチャゴチャした汚い結果で、はっきりとしたものにはならないのですが。そういう解析はもちろんできますし、現在いろいろな分野にたくさんあるデータを解析してモデルを作っていかなければならない段階では、そういう汚い方法を使わざるを得ない。もし将来的に、全部を確率変数にしたような数学的にきれいな体系ができれば、そういうゴチャゴチャなしに、簡単に「こういう現象だったら、こういうモデル」として、そこに枝葉をつけていくことで、より本物に近づけていくというようなことが、多分できるとは思います。

飛田　一つ例を言いますと、ファインマンの経路積分(path integral)というのがあります。量子力学を作るときに、シュレーディンガーとハイゼンベルクと二つ方法があっ

飛田武幸氏

て、それが等価だということが証明されたわけですが、ファインマンが量子力学の第三の設定だといって、経路積分ということを言い出した。ラグランジュ力学と言いますと、ラグランジュ関数があると、ちょうど公文先生と一緒にポントリャーギンの本で勉強したように、アクション積分を考えて、その変分をとるとクラシカルな軌跡ができる。クラシカルな軌跡というのは、こうしてラグランジュ関数から一意的に決まりますが、量子力学になると、軌跡はゆらいでいます。ゆらぎでフラフラしているわけです。このゆらぎをどう理解するかが問題です。アクションに i と定数をつけて指数関数にしたものを可能な径路すべてについて平均してプロパゲータ(グリーン関数)を決めようというのが、ファインマンのアイデアです。このようにして量子力学を設定することを提案しました。そこで、径路についての平均(積分)の計算はどうするのかというのが大問題で、それが径路積分の理論として議論されています。径路の近似とか、質量とかその他の量を虚数にして既存の積分論に持ち込む方法などが工夫されています。物理的に考えると、ゆらぐ量を、時間の両端を締め付けてブリッジにしたようなもので途中がブラウン運動的にゆらいでいると考えると、ゆらぎの関数の積分としてファインマンの積分が合理的に定義されます。ただし被積分関数はホワイトノイズの超汎関数になるので、われわれの理論が役立つわけです。これは経路積分という特殊な分野での例ですが。物理的な現象も物理学者の直観を尊重して、いまのようなアイデアを使えば、数学にとっても大きな進歩が期待されるでしょう。

■ ゆらぎや確率をどう教えているか

公文　とりあえず数学の体系として考えると、万物がゆらぎをもっているとすれば、それを前提とした数学の体系があって当たり前ではないか。むしろ、そのほうがより基本的なものであって、確実性の数学はその小さな部分集合に過ぎないということになりますね。

飛田　その上にランダムなものが乗っている。

公文　基盤になっていると言ってもいいのですか。そうだとすると、そのような数学理論がかなり広範な体系として出てくるのは、どのくらい先のことと想像しておられますか。

飛田　はじめから大きな目標があって、ここができたらおしまいというのではなくて、そういう方向に向かってできることから積み上げげていくというのが、いつもの方法だと思います。いま最初のほうでクリアな言い方ができなかったのは、ブラウン運動やホワイトノイズを基礎にすればよろしいと言い切れない部分も少しあるからです。ほとんどそれに近いことが証明されつつあるのですが。それでいいとすれば、ブラウン運動やホワイトノイズを基礎にした汎関数の解析を確立しましょうと。それにはどういう関数が必要なのか、どういう微分方程式が出てくるのかなど、まだたくさん課題が残っています。どういう方程式が重要かは、数学としての自然な発想から来るものが重要ですが、他に物理の知識が必要であったり、生物から課題を借りてきたり、いろいろなことをするわけです。今はできることからやっていくという段階なので、あまり大きな自慢はできない段階です。

公文　歴史的に言うと、だいたい20世紀の後半ぐらいから、そういう方向に自覚的に動き始めたと言っていいですか。

飛田　そうですね。

公文　すると半世紀かかって、少なくとも数学の中では一

つのしっかりしたニッチをもった。

飛田　方向としては間違っていないと思います、まだ未熟ですが。それまでもいろいろな積み重ねがあったわけです。たとえば確率微分方程式は、こういうものを考えていく一つの例と言えますか、大事な課題となっています。そういうものを含めた広いものを考えたい。無限次元の微積分ができたかというと、そういう状況でもない。「流体の問題は？」などと問われると課題は多くあります。特殊な場合場合をいくつか含めて、いくらか一般化したことしかできていないので。

公文　これからの若い人がそういう分野に興味をもって勉強していきたいと考えると、その場合に基本的な教養となる数学的な考え方やテクニックとはどういうものでしょうか。

飛田　ゆらぎをもったものの微積分を確立することだと思います。

公文　それが、それこそ初中等教育の過程の一つに入ってくるには……

飛田　難しいところでしょうね。

高安　確率と統計の見方というのは結構、軽視されていて、高校の数学ではほとんど習わないで来てしまいますね。大学に入ってからの数学でも、解析と代数は必ず学びますが、確率統計となると、必修になっているところは少ないと思います。

公文　おかしいですよね。量子力学の基本的な重要性というのは、誰でも認めている。どうして、子供のときからごく当たり前のように教えないのか。ゆらぎが最も基本的な現象だとすれば、それと日々向き合って暮らしているのに、なぜ、それを理解したり、対処したりするためのスキルやアティテュードを子供のときから与えないのか疑問です。

飛田　そうあって欲しいですけれどね。
教育面で歴史的なことにも関係しますが、教えている先生たちが習ったときの確率が何であったかといいますと、旧制


高安秀樹氏

高校の代数の教科書の後ろのほうは確率と統計でした。私が名古屋大学で講座を担当したとき、「確率の人だから代数の講座ではないですか」と数学の仲間でも言う人がいました。みんな高等学校のときの代数の教科書は後ろのほうが、順列・組合せがあって確率・統計でした。そういう歴史がありますから。

公文　新制でもそうでしたよ。確率・統計が出てくるのは解析Ⅱの終わりでしたか。

飛田　そういう歴史的なことがありまして、本当にそのまま受け入れるシステムになっていない。英語教育など参考になるかもしれませんが、いつまで経ってもしがらみが残っています。

公文　それこそ、自然数の$1+1=2$に対して、1にあたるのはブラウン運動、というような話ですよね。

飛田　少なくともブラウン運動を、もう少し上手に教えて欲しいと思います。確率解析では一番の基礎になるものですから。その他、ポワッソン過程とか。一般にレビィ過程というのがありまして、時間的にホモジーニアスに、独立に増えていくものはブラウン運動とポワッソンの組合せだということがあります。けれど、ブラウン運動でも、それを汎関数、

しかも超汎関数に広げていきますと、ある意味でポワッソンまでカバーできる。関数といっても、私の言葉では超汎関数と言っているのですが、その範囲まで広げて考えるとポワッソンまでカバーしますから、やはりブラウン運動が一番の基本です。難しいことは言わなくていいので、ブラウン運動が非常に基本的なものだということが指導者側で理解できたら、それを何らかの形で反映させて、生物でさっと習っておしまいではなくて、大事なゆらぐ現象として教えて欲しいと思います。ガウス分布が出ますが、高校では、それすら連続型で e の上に x の２乗の出てくる指数関数ではとてもというのだけれども、そういうものでもないでしょう。

公文　π でも相当苦しいのだけれど、e と聞くとそれこそアレルギーを起こしてしまうところがあります。

■経済のゆらぎとリスク管理

高安　身近な経済に関係する話でブラウン運動の大切さがわかるのは、リスクヘッジというか、とくにリスク分散ですね。お金を一つの資産、たとえば円だけでもったほうがいいのか、それともドルやユーロに分けてもったほうがいいのか。結果から言うと、分けたほうがリスクは減ります。値段はマーケットで決まって、マーケットは確率的に変動しますから、全資産を１種類でもっていると、これだけゆれるとすると、それを２種類に分けると$1/\sqrt{2}$に、３種類に分けると$1/\sqrt{3}$にゆらぎが減る。種類が多ければ多いほど、ゆらぎは減る。どうして分散するとリスクが減るのかということは、確率を勉強しなければわからないし、それを知っていればリスク分散の重要性がわかる。直感的に考えると、一番ゆらぎの小さい資産に集中したほうがリスクが減るように思うかもしれないけれど、実際に確率論にしたがって計算してみると、ゆらぎの小さい一つのものに集中するよりも、ゆらぎの大きいものにも分散したほうが、全体としてのゆらぎは減るわけです。経済では、保険もある種のリスク分散といえます。いくらの保険が適切かを考えようと思ったら、たとえば生命保険だったら何歳で死ぬ確率がどのくらいあるかということをきちんと考えると、これぐらいの値段が適正だと出るわけですが、それも確率で勉強しないといけない。それを知らないと言い値で保険を買わなければならなくなり、知らない間に保険金を払いすぎて損をすることになる。金融の現場ではそういう状況が実際に起こっていて、実際のマーケットの変動をきちんと解析すると、一番適正なリスクを減らす価格が出る。それを知らないために、オプションなどのいわゆる金融派生商品を高い値段で買わされることになるのです。

公文　一方では、世の中にはリスクがある、セキュリティは大事、自分の財産は自分で守るべきで、銀行に預けておけばいいということにはならないなどと、常識として言われています。身体についても、古典力学の法則に従って体が動いているわけではないので、リスクやゆらぎのことをよく理解して自分の健康管理を考えるということが、今後は常識になっていかないといけない。計画経済の専制的社会の中で生き方から考え方まで決められているならともかく、そうでないとすれば、やはり自分である程度判断できる基盤をもっていなければいけない。そういうときの大事な常識の、少なくとも根っこの部分にゆらぎとか確率といったものが入ってこなければおかしいですね。すでに専門家の間では入っていて、世の中もそれに従ってできているのに、一般の人がそこから全くずれた世界にあって、ますます学校の授業では確率も統計もやらないということになったら、本当に大変だと思います。

飛田　大変ですね。啓蒙的なこととして、前からテレビで天気予報の確率予報というのが始まっていて、少しずつ常識的にはなりつつあります。もう教材に入ってきても不思議ではないと思います。

高安　極端に言えば、どんな現象でも100％確実に起こるということはあり得ない。だから何％ぐらいのリスクがあってということが、本当はすべての量にあってしかるべきです。

　私がよくする話ですが、「風が吹けば桶屋が儲かる」という論理がありますね。笑い話ですが、一つひとつ、一段ずつを考えるともっともらしいのに、最後にはとんでもなく聞こえる。これを確率的な見方をすれば、風が吹いたときどのくらいの確率で砂が飛ぶか、飛んだ砂がどのくらいの確率で目に入るか、砂が目に入るとどのくらいの確率で目が見えなくなるか……というような確率の積み重ねで見ると、最初の原因から結果が実現する確率は何億分の１という形になる。そ

う解釈すれば、矛盾のある話ではなくて、論理的には可能なストーリーだけれど、ただ実現する確率がきわめて低いから無視できる、ということになる。物事を考えるときに、それがどのくらいの確率で起こることかを常に考えながら行動するのは、非常に重要なことだと思います。

とくに政策判断は、そうかもしれません。ほとんど起こる可能性のないことにものすごい労力を使うこともあるし、その逆に、大きな確率で起こりそうなのに何もしないということもある。常に一本道で考えるのではなくて、あれも起こりうる、これも起こりうるといろいろなシナリオを全部考えつつ、そこに確率の重みを加えながら一番いい答えを見出していくというのが、本来あるべき姿勢でしょう。そういう考え方の根本を数学で学ぶことが必要だと思います。

■ ブラック・ショールズの限界

飛田　最近、経済でもブラック・ショールズの公式に関心が集まっていて、大変結構なことだと思います。ただ、数学屋が怠けていますね。どういう意味かというと、あそこにゆらぎの項としてブラウン運動が出てくる。なぜ、それが出てくるかということは、数学できちんと定式化しなければならないことでしょう。経済現象を十分知らなくても仕方がないけれど、どういう現象のもとで、ランダムなインプットがブラウン運動と仮定してもよくて、そしてこういう方程式があるのだとするのは、数学者にも責任があると私は思います。解くことよりも、そういうことをきちんと考えることのほうが、むしろ数学の課題だと思います。

公文　それでもう一つの話ともつながるのですが、自然界でもそうかもしれないけれど、社会の領域では分布の形は正規分布というよりは、ベキ分布に従うような、ある意味歪んだと言うか、不均等な分布をもっているものが非常に多い。そのこと自体をあまり積極的に教えない。あるいは歪んでいるのは悪いことであって正規分布が良いことであるといった価値判断をしがちになる。しかし現実に理由があって、歪んだ分布が出てきているのだとすれば、いい悪いを問題にしてもしかたがない。どうしてそういうものが出てきて、正規分布とはどんな関係になっていて、どんな場合にそれが出てくるのか。正規分布やポワッソン分布なら、その訳は聞かせてもらえるのに、ベキ分布となるとなかなかそれがない。

高安　一つには、ベキ分布のようなものが現実にはいろいろ観測されていますが、それを説明する簡単明瞭な数学がまだ発展途上で、十分できていないというのがあると思います。私の専門である経済物理学(エコノフィジックス)の視点から言いますと、ブラック・ショールズの理論は非常に不満足なもので、実際のデータと比べるとずいぶん合わない。私は物理的な実際に観測したデータとつき合っていこうという見方でやっていますが、一番激しく動く為替の変動などでも、数分ぐらいのスケールで見ると全然ランダムウォークではない。もう少し長い時間、1時間より長いぐらいのスケールで、ある程度滑らかにして見てやると、その変動はかなりランダムに近い。しかし、ディーラーたちのやり合いがそのまま見えるのは短い時間のスケールで、そこでの世界は、少なくとも単純な仮定、たとえばゆらぎが時間の平方根で広がるとか、そういう性質は全然なくて、変動を抑え合うような効果と、ときどきそこから箍(たが)がはずれたように動く効果とがある。ブラック・ショールズのような考え方が経済の世界に確率を入れたのはいいことですが、まだまだ実際のデータと比べると不満足なのです。

それはあらゆる経済データに対して言えることで、数学のモデルがブラウン運動に関してはかなりよくできている。だからマーケットの変動もとりあえずブラウン運動で記述してブラック・ショールズの式が出る。それはいいのだけれど、実際のマーケットではもっと複雑なことが起こっているので、本当はもっと複雑な数学を用意しておいて欲しい。単純なブラウン運動ではなくて、こっちのモデルを使ったほうが現実に近いという数学がもしできていれば、それを使ってブラック・ショールズをさらに改良して、もっと現実に合うものが作れる。とりあえずいまの研究のレベルから言うと、現実に起こっているデータをそのまま説明できるような数学的な体系というのは、まだできていない。だから、ブラック・ショールズで足りない部分を試行錯誤的に改良してみて、ここを変えてみたらここが良くなった、ここが良くなったけれどここが悪くなったというレベルで、有り合わせ的にモデルを作っているような段階です。ただ、現実のマーケットとブラック・ショールズがかなり違うということは金融の現場の人はみんな知っていて、ブラック・ショールズの公式をそのまま利用

したら、あっという間にお金をすってしまう。

飛田　私も数学者の怠慢だと言ったのは、たとえばマルコフで済むとか、インプットはホワイトノイズだとかいうことで片付けてしまって、演習問題を解くようなことでいいのか、それを問いたいということです。本当にゆらぎは何であるのか、経済現象を見て、もう少し数学的にきちっとすべきだと思います。

公文　いまの高安先生のような観察があたっているとすれば、為替の動きなどは相当細かく分けてみると無限次元ではなくて、あるところまで行くと、ゆらぎに従わないところがあるかもしれないということですか。

高安　そこはちょっと微妙です。実際の為替がどう決まっているかというと、世界中にいる数千人の為替のディーラーが、マーケットを見ながら売り買いを決めている。そういう意味では、数千人の人たち一人ひとりの戦略がわかれば、未来はわかるはずで、それほどランダムではないかもしれない。でも、それはみんなが心の中にもっている戦略なので、現実には見えない。その現象を記述しようとすると、ある確率で上がる、下がるという確率的な記述しかどうしてもできない。勝手なモデルを作ってその中でシミュレートすることはできますが、実際の現象そのものを見ると、先ほどの情報が欠如するという意味からも、ランダムさはどこかに入れなければいけない。どこにどう入れたらいいのかというところが、モデルをどうしたらいいかということで、ブラック・ショールズの場合は単純に足し算で入れる。しかし、どうもそれではだめで、どうやって解決したらいいのかというところです。

公文　そういう意味で情報が不完全であって、だからそれを確率的に取り扱うしかないが、その取り扱いはガウス分布あるいはホワイトノイズに従ったゆらぎなのだと言ってしまうと、いまのようなズレが出てくる可能性が、ここの場合にはある。しかし、もう一方の考え方として、自然とか宇宙のより根源的なものを考えると、飛田先生のおっしゃったように、ブラウン運動的な無限次元のゆらぎの世界が一番根源的なものではないか、とまで言ってよろしいですか。

飛田　根源的であり、かぶさっている関数が非常に複雑になっています。ですから、いまの公文先生の言われたベキ乗法則ですか、安定分布が出てきても不思議ではありません。ガウス型のものが非線型な演算を経過してもなおかつガウス型かというと、それは違います。分布の認識ですが、ベキ乗分布はなぜ出てくるかということが大事だと思います。加法についての再生性(安定性)があれば、同じ分布に従う独立なものを足してやると、定数を除いて、まだ同じような分布に従う。とくに時間とともに変化していくとなるともっと制約を受けますから、ランダムだからいつもガウス型にしてしまうというのではありません。ランダムなものの中でも規則的なものは安定性によって分類できますが、それに応じてそれぞれの分布もあり、演算も変わってくる。しかし、ノンリニアな演算まで許せば、非常に基礎的なものはガウス型だということは言えると思います。

高安　ベキ分布が出てくる簡単なモデルは数学的に作れます。一番典型的な例は、足し算のノイズの項と、別に掛け算のノイズの項を入れてやります。つまり、足し算のゆらぎと掛け算のゆらぎがミックスしたものを考える。そういう非常に簡単なシステムでベキ乗の定常分布が出てくるという性質は、数学的にきっちり示せます。そうすると、自然界や経済現象で見られるベキ乗のゆらぎが出る現象は、足し算のノイズと掛け算のノイズがミックスしたような現象ではないかという見方ができます。実際にはもっと複雑かもしれないけれど、とりあえずそういうモデルを作ってみて、どれぐらい実際の現象と合うのかという検証はできます。そういうことをやれば、少なくとも単純な足し算の項だけのときよりは、現実に近いものになってくる。

公文　それは変換のしかたというか関数の形の問題ですね。

高安　掛け算というのは非線形ですから、やはり非線形性をまじめに考えていかなければならないのです。

飛田　ランダムな変数の扱いには、いつも演算が伴っていますから。前に触れましたように、ガウス分布は高等学校では複雑なものが組み合わさっているから教え難いというのですが、そういうことではなくて、たとえばドイツでどういう

教え方をしているかと思って高等学校の教科書を比較してみました。日本の教科書では二項分布があって、ノーマライズしてリミットに行くとガウス分布になるという絵が描いてある。ドイツは違います。二項分布はあるけれど、ガウス分布は別に大事なものとして存在していて、「二項分布も数が多いと(ノーマライズすれば)ガウス分布によって近似される」と書いてあります。全く立場が違うのです。そういうところは、やはり老舗の数学教育かなと思います。ガウス分布は二項分布から出てくるのではなくて、ガウスは測量の誤差の扱いで肌で感じており、一方で定性的な特徴づけもしているのです。中心極限定理もありますが、やはり平均値の最尤推定値がいつも算術平均だということが、ガウス分布の特徴づけに使われるわけです。そういうことをきちんと理解したうえでやさしい解説をしています。教育の問題にも、そういう学問の歴史的深さが影響しているのかなと思います。

公文　どこかの博物館で、正規分布を具体的に見せるのに、上からクルミのような物を落として障害物にあたるたびにどちらかの方向に分かれていって、下に溜まっていくという仕組みを作ってあった。あれは二項分布ですね。

飛田　二項分布のリミットがガウス分布だという理解をさせたいのでしょう。それは中心極限定理の説明であって、ガウス分布の説明とはちょっと違います。

■ 人の能力は正規分布かベキ分布か

高安　二項分布やガウス分布に付随する逸話的なことで気になっているのが、テストのときの偏差値です。平均を50点として、そこから標準偏差分ずれると偏差値60、2倍だと70として偏差値を出します。これは、テストで取れる点が正規分布、あるいは二項分布になるという仮定のもとです。しかし確率論の見方から言うと、そういう二項分布になるのはサイコロを振って当たる、当たらないという場合です。つまり、頭で考えて答えた問題が二項分布になるということ自体がもともとおかしい発想です。問題が難しくてわからないから適当にコインを投げて裏表で○×を付けたというなら、きっちり二項分布になるはずでしょう。ところがみんなが真面目に考えて解いたのだったら、それとは違う分布になっているはずなのに、とりあえず正規分布に近似するというやり方をします。私の主観では、人間の能力はベキ分布に近いものだという気がします。つまり平均値のまわりにゆらいでいるというよりは、はるかに幅広く、ある人は無限とも言えるぐらい伸びている。たとえば、アインシュタインと私の頭の良さを比べると何万倍も違うかもしれない。それは偏差値で何倍と言える世界ではないのではないか。普通のテストでは100点満点を超えられないので、有限な標準偏差でしか出ないのですが、だから単純に正規分布で近似して標準偏差で評価するというのは、すごく誤解を招きやすいところがあると思います。

公文　おっしゃるとおりですね。私もつくづく思うのですが、飛田先生の本を読ませていただくと、ここで言われている知識と私のもっているものの距離は無限に近いぐらいあって(笑)、どうしてこういうことを考えられるのだろうと驚きます。おっしゃったとおり、試験でも100点と99点の差は無限でありえます。つまり、100点満点でテストを作ってあるから、その上はわからない。99点の人が100点までいかないことは確かですが、100点の人がどこまでいけるかはわからない。そして、それがベキ分布である可能性は非常に高いと思います。そのことも、これからの人間は常識としてもって、そのうえで社会をどう作っていくかということを真面目に考えないと、「いや、みんな正規分布なんだよ」ということで済まされては困る。

高安　歴史的に見ても、偏差値から飛び抜けた数人が社会をガラッと変えることができています。そういう意味で、平均のまわりのゆらぎという見方、それも大事でしょうが、正規分布では見えないような大きなゆらぎが実際には起こっていてそれが大事だと思います。

公文　同時に、それならこのベキ分布の一番端にいるようなごく少数の人が何でもわかっていて、その人に従えば世の中を自由に作り変えていけるのか、プラトンのいう哲人政治になるのかと考えると、必ずしもそうではないかもしれない。ベキ分布的な能力の分布はアリの世界にもあって、アリの個体の働き具合は、ベキ分布できれいに近似できるといわれています。けれど一番働き者のアリが巣のことを全部知ってい

て、彼が巣を全部管理しているのかというと、そんなことはない。それと同じ意味で、非常に有能で何万人もの人を従わせることができるとか、莫大な儲けを上げることができるという人は当然いるのだけれど、じゃあ、その人が未来の世界の動きはこうなるから、こういう政治制度を作ればいいといえるような能力をもっているのかというと、これは多分能力の種類が違う。だから逆に、ベキ分布があるという現実にわれわれが向き合うときに、一方でそれを否定するのはおかしいし、他方でそこに「神」がいるのだというように思ってしまうのも危険ではないかと思います。そこまで数学でやってくださいとは言いませんが(笑)。

飛田　いま、いろいろなことをおっしゃったのですが、それには数学でやるべきものも多く含まれていると思います。繰り返しですが、確率微分方程式の美しい理論とかブラック・ショールズの新しい話題でも、すでに問題設定があって答えを出すというだけではなく、創始者のアイデアを思い、具体的なランダム現象をみて、どう数式で表現するかということも大切です。数学的な展開の重要性は申すまでもありません。

■ 自然科学と数学・物理学・経済学

公文　そろそろ時間なのですが、最後に何かうかがっておけることがあれば……。

飛田　よく応用数学といって数学の物理への応用等ということがありますが、ウラムというドイツの物理学者の言葉に「物理学の数学への応用」というのがあります。数学は固有の体系で、固有の考え方や設定の方法で進むことがあるけれど、そういう純粋培養だけではなくて、サイエンスの他分野といつも交流をもちながら課題をもらい、お返しもする。物理学を応用した数学というような一方通行ではなくて、相互に新しい課題を見つける交流もすべきだと思います。そのためには他の分野の人と話ができる共通の言葉をもっと増やさなければいけないでしょう。私は外国に行くと、「数学は自然科学であるかどうか」をよく質問します。長倉三郎先生のプロジェクト“科学と社会”で、数学は当然サイエンスだとばかり思って話をしていたら、あるとき「それは全然違う。数学はどうぞご自由におやりください」と言われて仰天しました。欧米ではこの質問に対する答えに多様性がありました。もちろん数学にはサイエンスでない部分もあるでしょうが、自然科学の中で尊重される立場、厄介者ではなく協力する立場でなければならないと思っているのですが。ヨーロッパではそれが当然のようですが、日本ではなかなかそうはいかないようです。やはり数学はサイエンスではないですか。どう思われますか。

公文　私は何となく、数学といえば、いわゆる自然科学とは違っていて、われわれが記号や概念を作って、概念の間の関係を操作したり展開したりしていく学問であって、現実とは違うと思っていました。ただ最近、特にコンピュータその他が出てくると、そういう概念の世界自体を現実にしてしまうということも可能になり、あるいはコンピュータ・シミュレーションといっても概念のモデルを元にしてシミュレートしているのか、現実を元にしてシミュレートしているのか、どっちとも言いきれないようなこともあって、そもそも抽象概念対リアルなものという区別をすることがおかしいのかもしれませんね。とすると、数学と自然科学のカテゴリーを分けるというのは変だし、自然科学と社会科学を分けるのもおかしいという気がしてきます。

高安　私自身は数学が好きで、新しい数学を使えば新しい物理ができると思っているぐらいですから、数学が発展するのは非常にいいことだと思います。最近、物理の研究者の中にも、「もう数学は要らない」という極論を言う人もいます。というのは、計算機で何でもシミュレートできるし、計算機はすべて離散量だけでいい。それだったら離散的な話で、計算機で全部シミュレートすればいい。いろいろな現象をコンピュータでできるモデルを作って研究する、というスタイルでやっている人もかなりいるのです。ただ私自身は、数学がないと人間が物事を理解したことにならないと思います。計算機でものすごく複雑なモデルを作って現実に近いものができたとしても、何が本質的でその結果が出るのか、何が大事なものかはわからない。数学でいろいろ極限を取ったりすると、一番大事なものが見えてくる場合が結構あります。抽象化することが、人間が本当に理解できることだと思うのです。

さきほど １＋１ が確率変数だと２にならないかもしれな

いという話をしましたが、１＋１でも十分に難しい。無限は逆数を取ると０になるので、０ならわかる。人間が本当に直観で理解できるのは０と１と無限大ぐらいで、あとは何となくわかったような気になっているだけかもしれない。本当に物事の本質を見るには、極限を取って考えるようなものの見方が欠かせないと私は思います。

公文　いま高安先生がいわれた数学が要らないというのは、演算(computation)があれば解析(analysis)は必要がないという議論ですね。しかし、そもそもその元になっている円や無限、群といったコンセプトはコンピュータからは出てきませんよね。ブラウン運動もそうです。コンピュータはそれをシミュレートできるだけではないでしょうか。

高安　シミュレーションだけだと、現実に近いものができても、どこをどう変えればどういう結果が出るという見通しが利きません。まあ、パラメータをしらみつぶしに変えていって全部やればいいという見方もありますが、根本的にどこが大事とか、どうしてこうなるのかを理解するためには数学的なものの見方が必要です。

飛田　全面的に賛成です。もう一つ、数学が単なる観念の論理だけにとどまらないというのは、自然科学にも拠点をもっているからでしょう。自然は尊く神秘的なものであるし、何らかの意味で最適(optimal)なことをしていると思います。またその中に普遍性があったり、シンメトリーがあったりという、何か自然のもつ美しさがあります。その自然現象を数学にしようというときには、そういう最適なものやシンメトリーを反映させたような数学の理論が対応するのではないかと思います。いつもそう考えています。そういう意味では、ブラウン運動はまだわかっていない。他にもどういう最適性があるのか、どんなシンメトリーがあるのか。ホワイトノイズにして無限次元の回転で不変だから対称性があるとか、いろいろ言いますけれど、まだまだそれ以外にも豊富な内容をもっているでしょう。自然現象としてブラウン運動を見た場合に、もっともっと深い性質が見出されるべきだと思います。そういうことが数学に反映してくると思うので、数学を単なる論理の相互関係だとして満足してしまうのは、内容を少なくしているように思います。

公文　つまり、数学とは、世界なり宇宙なりのあり方についてある一つの言明なり見通しをもったうえでやっている営みである。自然は最適化をはかろうとしているとか。

飛田　そういうものを発見して提示していかなければならないし、それを適用することが望まれます。

公文　そこまでいくと定義の問題になって、そういうことをやっているあなたはもはや数学者ではなく、哲学者か科学者ですよ、ということになるかもしれませんね。

高安　日本だと数学と物理、数学と経済は少し近い感じですが、物理と経済となるとまだまだ距離がある。アメリカの本屋さんに行くと、数学、物理、経済が一つの棚に並んでいることがしばしばあります。実際に本を見れば、経済の本には式がいっぱいあって、実用的な意味から言えば数学ですよね。物理の本ももちろん数学です。そういう実用的な見方からすれば、経済も物理も数学にちょっと意味づけをしているだけという見方もできるわけです。そういう実用的な見方も、日本人に足らないところかなと思います。少なくとも日本では、経済をやる人は文系、というフィルターがかなりかかっています。けれど、実務の経済は数字ばかりで完璧に理系の世界です。そこにギャップがあって、現実の経済とうまく折り合いがつかないような気がします。

公文　今日は、とても難しかったけれど、興味深いお話をいろいろとおうかがいできて、ありがとうございました。
　またこういう機会があって、次のお話が聞けるということがあれば、いつでも喜んでご一緒させていただきたいと思います。

（2004年１月29日GLOCOMにて収録）